Wie knacke ich ein Fourier-Integral?

Definition

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) \frac{dk}{2\pi} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\, dx \tag{1}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t)\, dt \tag{2}$$

Erweiterung als komplexes Kurvenintegral

Für $x > 0$ gilt, dass der Fourierkern e^{ikx} für komplexe k mit positivem Imaginärteil exponentiell verschwindet. ⇒ Wir schließen das Integral in der oberen Halbebene:

$$f(x) = \int_{\circlearrowleft} e^{ikx} \tilde{f}(k) \frac{dk}{2\pi} \tag{3}$$

Für $x < 0$ gilt, dass der Fourierkern e^{ikx} für komplexe k mit negativem Imaginärteil exponentiell verschwindet. ⇒ Wir schließen das Integral in der unteren Halbebene:

$$f(x) = \int_{\circlearrowright} e^{ikx} \tilde{f}(k) \frac{dk}{2\pi} \tag{4}$$

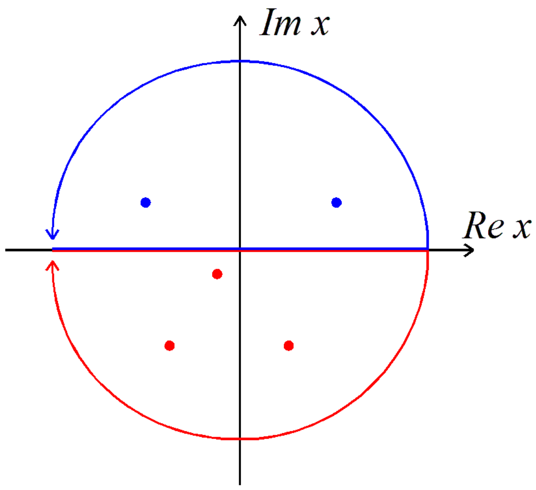

Abbildung 1: Komplexe Integrationswege für das Fourier-Integral. Die Punkte stellen Polstellen dar, an denen Residuen auftreten können.

Residuensatz

Ist die Funktion $\tilde{g}(k)$ in einem Gebiet überall holomorph bis auf die Punkte $z_1, ..., z_n$, so gilt für das Kurvenintegral um dieses Gebiet:

$$\oint \tilde{g}(k)\, dk \quad = \quad 2\pi i \sum_n Res_{z_n} \tilde{g} \tag{5}$$

Anwendung auf das Fourier-Integral

Für $x > 0$ ergibt sich das Integral als Summe über die Residuen in der oberen Halbebene:

$$f(x) \quad = \quad i \sum_n Res_{z_n} \left(e^{ikx} \tilde{f}(k) \right) \tag{6}$$

Für $x < 0$ ergibt sich das Integral als Summe über die Residuen in der unteren Halbebene: (Das Minuszeichen erscheint, da das Gebiet im Uhrzeigersinn umlaufen wird.)

$$f(x) \quad = \quad -i \sum_n Res_{z_n} \left(e^{ikx} \tilde{f}(k) \right) \tag{7}$$

Wie berechne ich Residuen?

- Ist eine Funktion f um den Punkt z in eine Laurent-Reihe entwickelbar,

$$f(x) \quad = \quad \ldots + \frac{a_{-2}}{(x-z)^2} + \frac{a_{-1}}{(x-z)} + a_0 + a_1(x-z) + a_2(x-z)^2 + \ldots \tag{8}$$

  so ist das Residuum gleich a_{-1}.

- Hat $f(x)$ eine einfache Polstelle in z, so gilt

$$Res_z f \quad = \quad \lim_{x \to z} \left((x-z) f(x) \right) \tag{9}$$

- Hat $f(x)$ eine einfache Polstelle in z, gilt $f(x) = g(x)h(x)$, und $h(x)$ ist holomorph in z, so gilt

$$Res_z f \quad = \quad h(z) \cdot Res_z g\,. \tag{10}$$

- Hat $f(x)$ eine n-fache Polstelle in z, so gilt

$$Res_z f \quad = \quad \frac{1}{(n-1)!} \lim_{x \to z} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left((x-z)^n f(x) \right)\,. \tag{11}$$